$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{100}(x)\, dx$$

Levon Ghazaryan, 5986811

6. Juni 2010

Wir hoffen das die nachstehende Rechnung einem davon überzeugt das eine Aufgabe wie das ausrechnen des Integrals der hundertsten Potenz von Cosinus durchaus eine Anspruchsvolle und spannende Mathematische Übung darstellt.

Es ist:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2k}(x)\,dx &= 2\int_{-\pi}^{0} \cos^{2k}(x)\,dx \\
&= 2\int_{-\pi}^{0} \cos^{2(k-1)}(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{0} \cos^{2(k-1)}(x)\sin^2(x)\,dx \\
&=: C(k-1) - CS(k-1) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Weiter rechnen wir:

$$\begin{aligned}
CS(k-1) &= 2\int_{-1}^{1} x^{2(k-1)}(1-x^2)^{1/2}\,dx = 2\frac{2k-3}{3}\int_{-1}^{1} x^{2(k-2)}(1-x^2)^{3/2}\,dx \\
&= 2\frac{(2k-3)\cdot\ldots\cdot\overbrace{(2k-(2(k-1)+1))}^{=1}}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{2k-1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}}\,dx. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Nun eine kleine Nebenrechnung, die unter anderem ein geometrisches Zusammenhang verdeutlicht:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}}\,dx &= (2k-1)\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{(2k-3)/2}\,dx \\
&= (2k-1)\left[-\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}}\,dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{2k-3}{2}}\,dx\right] \\
&\Longleftrightarrow \\
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}}\,dx &= \frac{2k-1}{2k}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{2k-3}{2}}\,dx\,. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Also folgt aus:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \pi$$

die Formel:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}}\, dx = \pi \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k}\,. \tag{4}$$

Einsetzen in (2) liefert schließlich:

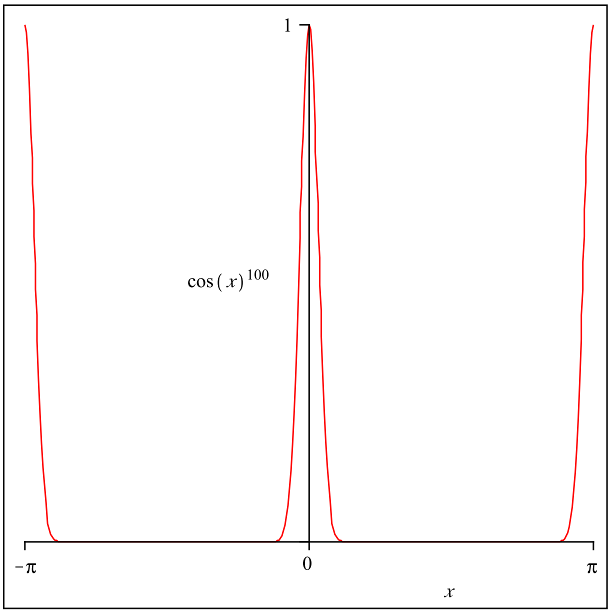
$$CS(k-1) = \pi \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{4 \cdot \ldots \cdot 2k}. \tag{5}$$

Zusamen mit (1) erhalten wir:

$$\begin{aligned} C(k) &= C(k-1) - CS(k-1) = C(k-1) - \pi \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{4 \cdot \ldots \cdot 2k} \\ &= C(2) - \sum_{j=1}^{k-2} CS(k-j) \\ &= \pi \left[\frac{3}{4} - \sum_{j=1}^{k-2} \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2(k-j)-1)}{4 \cdot \ldots \cdot 2((k-j)+1)} \right]\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Und für $k = 50$ erhalten wir:

$$C(50) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{100}(x)\, dx = \frac{12611418068195524166851562157}{79228162514264337593543950336}\pi\,. \tag{7}$$


1
cos (x) 100
−π
0
π
x